

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2010
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω t_1, t_2, \dots, t_n οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή \bar{x} .

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

A2. Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
$[0 - \dots)$...	20
$[\dots - \dots)$	6	40
$[\dots - \dots)$...	45
$[\dots - \dots)$...	30
$[\dots - \dots)$...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4.

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά ».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος
$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ο ζητούμενος αριθμητικός μέσος είναι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_v) - (v\bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

A2. Θεωρία σελίδα 86, 87, σχολικό βιβλίο.

A3. Θεωρία σελ. 140, σχολικό βιβλίο.

Βέβαιο είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα και τέτοιο είναι το σύνολο Ω .

Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ και τέτοιο είναι το κενό σύνολο \emptyset .

A4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Λ	Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x \neq 1$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-1}{x-1} &= \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1} = \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1} = \\ &= \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \\ &= \frac{2(x^2-x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = 1.$$

B2. Είναι

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2-x+1}-1)' = 2 \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} (x^2-x+1)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = -1.$$

B3. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ τότε είναι: $\varepsilon\phi\omega = f'(0) = -1$, και επειδή $0 \leq \omega < \pi$, προκύπτει $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν το πλάτος κάθε κλάσης είναι c , τότε οι δύο πρώτες κλάσεις είναι $[0, c)$ και $[c, 2c)$.
Αφού το κέντρο της $2^{\text{ης}}$ κλάσης δίνεται ότι είναι 6, προκύπτει $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ X_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
$[0, 4)$	2	20
$[4, 8)$	6	40
$[8, 12)$	10	45
$[12, 16)$	14	30
$[16, 20)$	18	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

$$\bar{x} = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 v_i x_i = \frac{1}{160} (2 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 10 \cdot 45 + 14 \cdot 30 + 18 \cdot 25) = \frac{1600}{160} = 10 \text{ κιλά.}$$

$$s^2 = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{160} [20(2-10)^2 + 40(6-10)^2 + 45(10-10)^2 + 30(14-10)^2 + 25(18-10)^2]$$
$$= \frac{1}{160} \cdot 4000 = 25. \text{ Άρα } s = 5 \text{ κιλά.}$$

Γ3. Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\%$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4.
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot v_2 + v_3 + \frac{1}{2} v_4}{160} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 40 + 45 + \frac{1}{2} \cdot 30}{160} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}.$$

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s στο **Γ2** ερώτημα θα μπορούσε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί και ο τύπος που δίνεται ως εξής:

$$s^2 = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 x_i^2 v_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{160} \right)^2 = \frac{1}{160} (20000) - (\bar{x})^2 = 125 - 100 = 25. \text{ Άρα } s = 5 \text{ κιλά.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad f'(x) = \frac{1}{x-P(A)} - (x-P(A)) = \frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} = \frac{(1-x+P(A)) \cdot (1+x-P(A))}{x-P(A)}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = P(A) + 1$ ή $x_2 = P(A) - 1$.

Είναι $x_1 > P(A)$ διότι $P(A) + 1 > P(A) \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει,

ενώ $x_2 < P(A)$ διότι $P(A) - 1 < P(A) \Leftrightarrow -1 < 0$, άρα η x_2 απορρίπτεται.

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε:

α) $x > P(A)$ άρα $x - P(A) > 0$

β) $x > P(A)$ άρα $x - P(A) > 0$ και $x - P(A) + 1 > 1 > 0$.

γ) Έτσι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x + P(A) > 0 \Leftrightarrow x < 1 + P(A)$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$

$1 - x + P(A) < 0 \Leftrightarrow x > 1 + P(A)$.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών για την f είναι:

x	P(A)	1+P(A)	+∞
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(P(A), 1 + P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1 + P(A), +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1 + P(A)$ το

$$\begin{aligned} f(1+P(A)) &= \ln(1+P(A)-P(A)) - \frac{1}{2}(1+P(A)-P(A))^2 + P(B) = \\ &= \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\Delta 2.$ Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 5/3$, από $\Delta 1$ θα είναι:

$$1 + P(A) = 5/3 \Leftrightarrow P(A) = 5/3 - 1 \Leftrightarrow P(A) = 2/3.$$

Επίσης αφού $f(x_0) = 0$ είναι λόγω του $\Delta 1$

$$f(1+P(A)) = 0 \Leftrightarrow P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$$

$\Delta 3.$ Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$.

Όμως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B)' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$\Delta 4.$ Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

$$\text{Άρα } P[(A-B) \cup (B-A)] = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$