<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ</u>
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2011
<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \simeq 6\overline{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$.

Μονάδες 6

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων f_i % έχει διαδοχικές κορυφές τις:

$A(8, 0)$ $\quad B(10, 10)$ $\quad \Gamma(12, 20)$ $\quad \Delta(14, y_\Delta)$
$E(16, y_E)$ $\quad Z(18, 10)$ $\quad H(20, 0)$

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH$.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και E, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i %.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων f_i % της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1$, $i = 1,2,3$ οι συχνότητες των τιμών x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των τιμών.

Μονάδες 6

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 152 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου. Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \varnothing$.

Α3. Θεωρία, σελ. 65 σχολικού βιβλίου. Η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος, προκύπτει από το λόγο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, όπου ν_i είναι η συχνότητα της τιμής x_i προς το μέγεθος ν του δείγματος. Έτσι, αν πολλαπλασιαστεί επί 100 εκφράζει την ποσοστιαία εμφάνιση της τιμής x_i, σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος ν.

Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $N(A)$, $N(K)$, $N(M)$ τα πλήθη αντίστοιχα των άσπρων (A), κόκκινων (K) και μαύρων (M) σφαιρών. Επειδή $P(M)=\frac{1}{4}$, θα είναι: $\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega)=4\cdot N(M)$.
Αφού $64 < N(\Omega) < 72$ έπεται $64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$.
Αφού $N(M)$ είναι φυσικός αριθμός, προκύπτει $N(M) = 17$.
Άρα $N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68$.

Β2. Είναι $A \cup K \cup M = \Omega$, άρα $P(A \cup K \cup M) = P(\Omega) = 1$ (1),
με $A \cap M = \varnothing$, $A \cap K = \varnothing$, $M \cap K = \varnothing$, δηλαδή τα A, K, M, είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Έτσι η (1) γράφεται $P(A) + P(K) + P(M) = 1$.
Προκύπτει έτσι $\frac{1}{4}+4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\frac{1}{4}$.

- Για $\lambda = 1$ προκύπτει $P(A) = 4$, οπότε η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται διότι $0 \le P(A) \le 1$.
- Για $\lambda=\frac{1}{4}$ προκύπτει $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(K)=\frac{1}{2}$, $P(M)=\frac{1}{4}$. Άρα η τιμή $\lambda=\frac{1}{4}$ είναι η ζητούμενη.

Β3. $P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(M)=\frac{1}{4}\cdot N(\Omega)=\frac{1}{4}\cdot 68=17.$

Επίσης, $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(A)=\frac{1}{4}\cdot N(\Omega)=\frac{1}{4}\cdot 68=17.$

$P^{'}(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(K)=\frac{1}{2}N(\Omega)=\frac{1}{2}\cdot 68=34.$

Β4. Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί άσπρη σφαίρα και M το ενδεχόμενο να επιλεγεί μαύρη σφαίρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup M$. Επειδή τα A, M είναι ασυμβίβαστα, είναι: $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{7}x_i f_i=8\cdot 0+10\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}2+14\cdot\frac{y_\Delta}{100}+16\cdot\frac{y_E}{100}+18\cdot 0{,}1+20\cdot 0$

Επειδή είναι $\bar{x}=14{,}2$ και $y_\Delta=y_E$ έπεται

$14{,}2 = 1 + 2{,}4 + 30\frac{y_\Delta}{100} + 1{,}8 \Leftrightarrow 14{,}2-5{,}2=30y_\Delta\Leftrightarrow \frac{y_\Delta}{100}=\frac{9}{30}$.

Άρα: $y_\Delta=y_E=30$

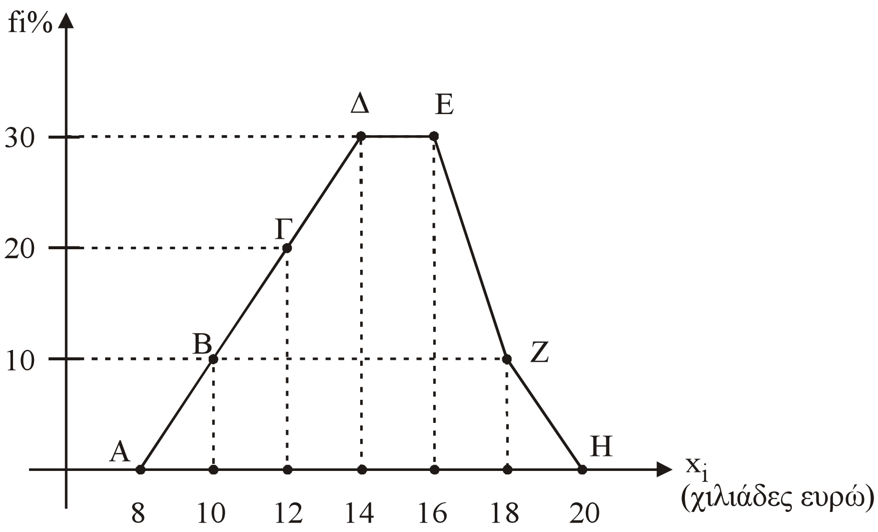
2ος τρόπος:

Επειδή $y_\Delta+y_E=60$

και $\Delta E\ //\ x'x$ είναι $y_\Delta=y_E$.

Έτσι προκύπτει $y_\Delta=y_E=30$.

Γ2. Είναι:



Γ3. Είναι:

[-)	x_i	f_i %
9 - 11	10	10
11 - 13	12	20
13 - 15	14	30
15 - 17	16	30
17 - 19	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα του ερωτήματος Γ3, το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το επιπλέον εφάπαξ ποσό είναι 40%.

Γ5. Είναι $\nu = 80$, διότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το πλήθος ν των μετρήσεων.
Έτσι ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό, που αναφέρεται στο ερώτημα Γ4, είναι: $80 \cdot 40\% = 32$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\right]' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left[\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x\right)\right]' =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left[\frac{1}{3}\left(3x^3-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}x\right)\right] = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow (\text{αφού } e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)} \neq 0 \ \ \forall\, x \in R)$$

$$x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0 \Leftrightarrow 15x^2-11x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x=\frac{2}{5}.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		$1/3$		$2/5$		$+\infty$
f′		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$,
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.

Δ2. Η f σύμφωνα με το Δ1 παρουσιάζει:

- τ. μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$
- τ. ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{2}{5}$.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \le P(B)$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Ακόμα, επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Οπότε:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Δ3. **α)**

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})} = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})} \overset{e^x \ 1-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) - 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5x}{2} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2, x_3 = 3.$$

β) Είναι:

- $\nu_1 = 2 \cdot x_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
- $\nu_2 = 2 \cdot x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
- $\nu_3 = 2 \cdot x_3 + 2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	ν_i	$x_i \nu_i$
$x_1 = 0$	$\nu_1 = 1$	0
$x_2 = 2$	$\nu_2 = 5$	10
$x_3 = 3$	$\nu_3 = 7$	21
	$\nu = 13$	

Άρα $\bar{x} = \dfrac{0+10+21}{13} = \dfrac{31}{13}$.