

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ
2013
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β ;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

(Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με

$$g(x) \neq 0, \text{ τότε ισχύει: } \left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(Μον. 2)

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^\beta e^x dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta g(x) dx$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_a^\beta \eta \mu x dx = \dots$

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και c μία σταθερά, τότε:

$$(c \cdot f)'(x) = \dots$$

(Μον. 3)

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:

$$(x^\alpha)' = \dots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$v = \dots$	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2 (x + \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x - 2)(3x + 2\alpha - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τη σταθερή διαφορά $F(\beta) - F(\alpha)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β και το συμβολίζουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

A2. $\alpha \rightarrow \Sigma, \beta \rightarrow \Sigma, \gamma \rightarrow \Lambda, \delta \rightarrow \Lambda, \varepsilon \rightarrow \Sigma$.

A3. α)
$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma \nu \beta + \sigma \nu \alpha.$$

β) $(cf)'(x) = cf'(x).$

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$

ΘΕΜΑ Β

B1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2.$

B2.
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3} + 2) = 1(\sqrt{1+3} + 2) = 4. \end{aligned}$$

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$ ή $\alpha = -2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	$25/50 = 50\%$	150
10	17	$17/50 = 34\%$	170
15	6	$6/50 = 12\%$	90
20	2	$2/50 = 4\%$	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2.
$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v} = \frac{450}{50} = 9.$$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με μισθό το πολύ 1000 € είναι $50\% + 34\% = 84\%$.

Γ4.
$$s^2 = \frac{v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + v_3(x_3 - \bar{x})^2 + v_4(x_4 - \bar{x})^2}{v}$$
$$= \frac{25(6-9)^2 + 17(10-9)^2 + 6(15-9)^2 + 2(20-9)^2}{50}$$
$$= \frac{25 \cdot 9 + 17 \cdot 1 + 6 \cdot 36 + 2 \cdot 121}{50} = \frac{700}{50} = 14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = [(x-2)^2 \cdot (x+\alpha)]' = [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)'$
 $2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2), x \in \mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, θα είναι $f'(4) = 0$.

Όμως $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$ οπότε

$$(4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow 2(10 + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$$

Δ3. Για την τιμή $\alpha = -5$ είναι:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5) \text{ και } f'(x) = (x-2) \cdot (3x-12)$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4.$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f .

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
f'	+	\emptyset	-	\emptyset	+
f	↗		↘		↗
		$\tau.\max$ $f(2)=0$	$\tau.\min$ $f(4)=-4$		

- Δ4.** Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των g, h , λύνοντας την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 6x - 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4.$$

Είναι $g(x) - h(x) = 3(x-2)(x-4)$.

Το πρόσημο της $g - h$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$g(x)-h(x)$	+	\emptyset	-	\emptyset	+

Έτσι

$$E(\Omega) = -\int_2^4 (3x^2 - 18x + 24) dx = -\left[x^3 - 9x^2 + 24x \right]_2^4 = \\ = -[(64 - 144 + 96) - (8 - 36 + 48)] = 4 \text{ τ.μ.}$$