ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 20/5/2015

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.31

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.22

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.87

Α4. α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$, λύνεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} 3x-1=0 \text{ ή} \\ 8x^2-6x+1=0 \end{Bmatrix}.$$

Η δεύτερη εξίσωση έχει $\Delta = 6^2-4*8*1$ =36-32=4>0

Άρα $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$=$\frac{6\pm2}{16}=\begin{Bmatrix} \frac{8}{16}=\frac{1}{2} \text{ ή} \\ \frac{4}{16}=\frac{1}{4} \end{Bmatrix}$. Άρα τελικά η αρχική εξίσωση έχει τρεις λύσεις:

$$x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{4}.$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι αν A, B, είναι δυο ενδεχόμενα, ισχύει ο εγκλεισμός

$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, συνεπώς $P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$, επομένως

$$P(A \cap B)=\frac{1}{4} < P(A)=\frac{1}{3} < P(A \cup B)=\frac{1}{2}.$$

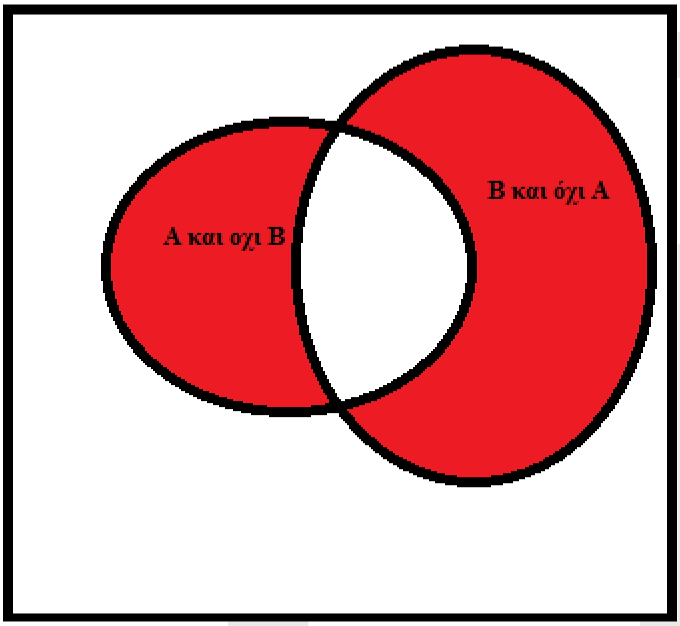
B2.

Είναι: $P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') =$

$= P(A') - P((A \cup B)') = 1 - P(A) - \big(1 - P(A \cup B)\big) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$

$\Delta = (A \cap B)'$, το οποίο απαγορεύει να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχομένα Α,Β.
Τότε: $P(\Delta) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

B3. Κάνοντας ένα σχήμα των ενδεχομένων παρατηρούμε ότι



$E = (A - B) \cup (B - A)$, και τα ενδεχόμενα αυτά είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$P(E) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) == P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

B4. Η δοσμένη εξίσωση του προβλήματος έχει

Δ=$(-3)^2 - 4 * (9) * (-2) = 9 + 72 = 81 = 9^2 > 0$, και επομένως υπάρχουν πάλι δυο λύσεις, οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \begin{cases} \dfrac{3+9}{18} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3-9}{18} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Οπότε $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$, γιατί η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι θετική, άρα η δεύτερη λύση απορρίπτεται.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την $P(B)$ ως εξής

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

Επιπλέον $P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$, άρα δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma)$, γιατί $P(B \cup \Gamma) \leq 1$, ενώ $P(B) + P(\Gamma) > 1$, άρα δεν είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα μεταξύ τους.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1.

Από τα δεδομένα του προβλήματος φαίνεται άμεσα ότι

$f_1\% = 10, f_5\% = 30, a_3 = 108^0$. Όμως $a_i = f_i * 360^0$, άρα $f_3 * 360^0 = 108^0$, ή

$$f_3 = \frac{108^0}{360^0} = 0.3, \Rightarrow f_3\% = 30$$

Επίσης $f_1 = 0.1, f_5 = 0.3$

Από τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{5} f_k = 1,$$

Βρίσκουμε άμεσα ότι $f_2 = 0.3 - f_4$ (1)

Παίρνοντας τις κεντρικές παρατηρήσεις της κάθε κλάσης, έχουμε:

$$x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 15, x_5 = 17.$$

Τέλος από τον τύπο του δειγματικού μέσου όρου

$14 = \bar{x} = \sum_{k=1}^{5} f_k * x_k$, βρίσκουμε ότι:

$9 * 0.1 + 11 * (0.3 - f_4) + 13 * 0.3 + 15 * f_4 + 17 * 0.3 = 14$, και επομένως με πράξεις βρίσκουμε ότι $f_4 = 0.2$ ή $f_4\% = 20$.

Γυρνώντας έπειτα στη σχέση (1) με τυπικούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $f_2 = 0.1$ ή $f_2\% = 10$.

Γ2.

Από τον τύπο της διακύμανσης

$$s^2 = \sum_{k=1}^{5} f_k * (x_k - \bar{x})^2 =$$

$$= 0.1 * (9 - 14)^2 + 0.1 * (11 - 14)^2 + 0.3 * (13 - 14)^2 + 0.2 * (15 - 14)^2 + 0.3 * (17 - 14)^2 = 6.6$$

Συνεπώς $s = \sqrt{6.6} \cong 2.57$

Εξετάζοντας τον συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}100\% = \frac{2.57}{14}100\% = 18.35\% > 10\%$,

Βλέπουμε άμεσα ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

Γνωρίζουμε ότι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5$, και επιπλέον

$$14 = \bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{5} \nu_\kappa * x_k$$

Επομένως:

$$14 = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{4} \nu_k x_k + f_5 * x_5 \Rightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + f_5 * 17 \Rightarrow \nu = 200.$$

Γ4.

Έχουμε για κάθε $i = 1,2,3,4,5$ $\beta_i = \frac{1}{s_a}a_i - \frac{\bar{a}}{s_a} = ca_i - c\bar{a}, όπου\ c = \frac{1}{s_a}$.

Τότε $\bar{\beta} = \frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_5}{5} = c\frac{a_1-\bar{a}+a_2-\bar{a}+\cdots+a_5-\bar{a}}{5} = c\bar{a} - c\bar{a} = 0$

Τέλος ${S_\beta}^2 = \frac{(\beta_1-0)^2+\cdots+(\beta_5-0)^2}{5} = \frac{c^2[(a_1-\bar{a})^2+\cdots+(a_1-\bar{a})^2]}{5} = c^2{s_a}^2 = \frac{1}{{s_a}^2}{s_a}^2 = 1$, από όπου έπεται ότι $s_\beta = 1$.

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1.

Αν στο εγγεγραμένο ορθογώνιο φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ λαμβάνουμε ότι

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + x^2$$

Όμως η διαγώνιος ΑΓ είναι διάμετρος, άρα ΑΓ=10

Οπότε $ΑΔ^2 = 100 - x^2$ ή $ΑΔ = \sqrt{100 - x^2}$.

Συνεπώς $f(x) = ΒΑΣΗ * ΥΨΟΣ = x\sqrt{100 - x^2},\ \ 0 < x < 10$.

Δ2.

Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,10), με

$$f'(x) = x'\sqrt{100 - x^2} + x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, 0 < x < 10$$

Η εξίσωση f'(x)=0, δίνει:

$$\sqrt{100 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow\ x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\ \epsilon\ (0,10)$$

Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow\ x^2 < 50 \Leftrightarrow\ 0 < x < 5\sqrt{2}$

Επομένως $f\ \ \nearrow\ στο\ \left(0, 5\sqrt{2}\right)$,

$f\ \ \searrow\ στο\ \ (5\sqrt{2}, 10)$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 5\sqrt{2}, με\ μέγιστη\ εμβαδόν\ \ f\left(5\sqrt{2}\right) = 50\ τ.μ.$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{98}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \lim_{h\to 1}\frac{1}{98}\frac{f(h)-f(1)}{h-1} = \frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση του 1+x=h, όπου όταν x$\to 0, τότε\ h \to 1$

Χρησιμοποιήσαμε επίσης την υπάρξη του ορίου $f'(1) = \lim\limits_{h\to 1}\frac{f(h)-f(1)}{h-1}$, αφού f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Δ4.

Ξέρουμε ότι $0 < P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \leq P(A) \leq 1 < 5\sqrt{2}$ (1)

Άρα αφού οι αριθμοί $P(A - B), P(A)\ \in \left(0, 5\sqrt{2}\right)$, και $P(A - B) \leq P(A)$, αφού

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι επειδή $P(A-B) \leq P(A)$, ότι θα ισχύει και η ανισότητα

$\sqrt{100-P(A)^2} \leq \sqrt{100-P(A-B)^2}$, και επομένως $\frac{1}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{100-P(A)^2}}$(2)

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A)^2}} \; (3)$$

Είναι πολύ απλό να ελέγξουμε ότι

$$\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A)^2}} \leq 5\sqrt{2} \; \Leftrightarrow \; P(A)^2 \leq 50(100-P(A)^2) \Leftrightarrow$$

$$P(A)^2 \leq \frac{5000}{51}, \textit{που ισχύει αφού } P(A)^2 \leq 1$$

Άρα οι αριθμοί $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}, \frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A)^2}} \in \left(0{,}5\sqrt{2}\right)$, *στο οποίο η* f είναι γνησίως αύξουσα.

Αφού τέλος $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A)^2}}$, έχουμε λόγω μονοτονίας ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\right)$$