ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

25/5/2015

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.150

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β:

Β1.

Έστω z=x+yi. Κάνοντας πράξεις στη δοσμένη σχέση του ερωτήματος βρίσκουμε ότι

$$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2 \Rightarrow -3x^2-3y^2=-12 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.

Β2.

α) Επειδή οι μιγαδικοί ανήκουν στον κύκλο του προηγούμενου ερωτήματος μπορούμε να συνάγουμε ότι $|z_1|=|z_2|=2 \Rightarrow \overline{z_1}=\frac{4}{z_1}, \overline{z_2}=\frac{4}{z_2}$.

Για να διαπιστώσουμε ότι ο w πράγματι είναι πραγματικός αρκεί να υπολογίσουμε τον $\overline{w}$

Είναι: $\overline{w}=\frac{2\overline{z1}}{\overline{z_2}}+\frac{2\overline{z2}}{\overline{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w$

β) Κάνοντας ομώνυμα στον w βλέπουμε ότι $|w|=\left|\frac{2z_1^2+2z_2^2}{z_1z_2}\right|=2\left|\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}\right|\leq$

$$\leq 2\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{4}=2\frac{4+4}{4}=4$$

χρησιμοποιώντας ότι $|z_1z_2|=4.$

Άρα $|w|\leq 4, και\ w\ πραγματικός, λαμβάνουμε:\ -4\leq w\leq 4$

Β3.

Αφού τώρα w=-4, με πράξεις οδηγούμαστε στη σχέση

$$\frac{2z_1^2+2z_2^2}{z_1z_2}=-4\Rightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2\Rightarrow (z_1+z_2)^2=0.$$

Για να ισχύει αυτό αναγκαστικά πρέπει $z_1=-z_2$.

Το ζητούμενο τρίγωνο τώρα έχει ως πλευρές τις ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ

Είναι: $AB=|z_1-z_2|, A\Gamma=|z_1-z_3|, B\Gamma=|z_2-z_3|$

Βλέπουμε με λίγο άλγεβρα ότι

$$B\Gamma=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||-1-2i|=2\sqrt{5}$$

$$A\Gamma=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}=B\Gamma$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πράξεις παρ/μων, με

$f'(x)=\frac{(e^x)'(x^2+1)-e^x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}\geq 0$, όπου $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1.$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επίσης, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

Και

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = 0$, γιατί $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το

$$f(\mathbb{R}) = (0,+\infty).$$

Γ2.

Είναι $f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = f(2) \Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{e^3}{2} \in f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$, άρα υπάρχει λόγω μονοτονίας της συνάρτησης f μοναδικός αριθμός $x_o \in \mathbb{R}, ώστε\ f(x_o) = \frac{e^3}{2}$.

Γ3.

Έστω τυχόν x>0. Ορίζουμέ τη συνάρτηση ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού η f είναι παντού συνεχής

Επιπλέον $F'(x) = f(x)$

- $H\ F\ είναι\ συνεχής\ στο\ [2x,4x]$
- $H\ F\ είναι\ παρ/μη\ στο\ (2x,4x)$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής(Θ.Μ.Τ.) υπάρχει $\xi \in (2x,4x)$:

$$f(\xi) = \frac{F(4x)-F(2x)}{2x} = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

Τώρα ξέρουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα,

Άρα αφού $\xi < 4x \Rightarrow f(\xi) < f(4x) \Rightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$, για κάθε x>0.

Γ4.

Είναι $g'(0) = \lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt-2}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt-2x}{x^2} =$

$$\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{4f(4x)-2f(2x)-2}{2x} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{==}} \lim_{x\to 0}\frac{16f'(4x)-4f'(2x)}{2} = 6f'(0) = 6.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο 0

Επίσης η g είναι παρ/μη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παρ/μων

Τότε για κάθε x>0 έχουμε:

$$g'(x) = \frac{1}{x}\big(4f(4x)-2f(2x)\big) - \frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt =$$

$=\frac{1}{x}\left[4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right] =$

$\frac{1}{x^2}\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt + 2x\big(f(4x)-f(2x)\big)\right] > 0$, για κάθε x>0

Επειδή γνωρίζουμε από το ερώτημα Γ3 ότι $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$, και αφού f γνησίως αύξουσα και 2x<4x έπεται ότι $f(4x)-f(2x) > 0$

Άρα $g'(0)=6, g'(x)>0, για\ κάθε\ x>0$, συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1.

Κάνοντας επιμεριστική στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση βλέπουμε άμεσα ότι μπορούμε να τη γράψουμε

$$[e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = 2.$$

Άρα έχουμε ότι $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$

Για x=0, επειδή f(0)=0, βλέπουμε ότι c=0. Τέλος πολλαπλασιάζοντας τη δοσμένη εξίσωση με $e^{f(x)}$, καταλήγουμε στη σχέση

$$e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2.$$

Η συνάρτηση $\left(e^{f(x)} - x\right)^2$ διατηρεί πρόσημο γιατί δεν έχει ρίζες, και άρα είναι αυστηρά θετική.

Άρα και η συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} - x$, διατηρεί πρόσημο, και αφού h(0)=1>0, αναγκαστικά ισχύει ότι h(x)>0

Καταλήγουμε λοιπόν ότι $e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, για κάθε x ∈ ℝ

Δ2.

α) Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση f, έχουμε

$$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Συνεπώς εύκολα μετά βλέπουμε ότι

$$f''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$$

Αφού $\sqrt{x^2+1}(x^2+1) > 0, για\ κάθε\ x \in$ ℝ, παρατηρούμε ότι

- $f''(x) > 0, αν\ x < 0$
- $f''(x) \leq 0, αν\ x \geq 0$

  Άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0)$
  Άρα η f κοίλη στο $[0, +\infty)$
  Σημείο καμπής στο $x_o = 0$

β) Παρατηρούμε κατ'αρχήν ότι η ευθεία y=x είναι η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο Α(0,f(0)).

Επειδή τώρα η f είναι κυρτή στο [0,1] που είναι το πεδίο ολοκλήρωσης, θα είναι κάτω από την εφαπτομένης της, y=x, σε ολόκληρο το [0,1], δηλαδή $f(x) \leq x$

Άρα $E(\Omega) = -\int_0^1 (f(x) - x)dx = -\int_0^1 [\ln(x + \sqrt{x^2+1})) - x]\, dx =$

$$\int_0^1 [\ln\left(x + \sqrt{x^2+1})\right)]\, dx + \int_0^1 xdx = -[xln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]_0^1 + \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx + [\frac{x^2}{2}]_0^1 =$$

$$=-\ln(1+\sqrt{2}) + [\sqrt{x^2+1}]_0^1 + \frac{1}{2} = -\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \frac{1}{2}, τ.μ.$$

Δ3.

Είναι : $\lim_{x\to 0^+}(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1) = e^0 - 1 = 0, αφού \lim_{x\to 0^+} \int_0^x f^2(t)dt = 0$

Επίσης $\lim_{x\to 0^+} \ln|f(x)| = -\infty$, αφού f(0)=0

Άρα το όριο έχει απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$, και επομένως με κατάλληλη τροποποίηση του ορίου μπορούμε να εφαρμόσουμε D.L.H.

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1)\ln|f(x)| = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\big(f(x)\big)}{\dfrac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1)^2}{\dfrac{f(x)}{-e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)f'(x)(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1)^2}{-e^{\int_0^x f^2(t)dt}} = 0,$$

Επειδή

$$f(0)=0, f'(0)=0, \lim_{x\to 0^+}(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1)^2 = 0, \lim_{x\to 0^+} -e^{\int_0^x f^2(t)dt} = -1$$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x-2)(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt) + (x-3)(8-3)\int_0^x f^2(t)dt$$

Είναι

$$g(2) = 3 - 8\int_0^2 f^2(t)dt$$

$$g(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt$$

Χρησιμοποιούμε ότι η f είναι κοίλη και άρα στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι κάτω από την εφαπτομένη της στο σημείο Α(0,f(0))

Ισχύει δηλαδή η ανισότητα $f(x) < x, για\ κάθε\ x > 0$

Άρα $f(t^2) < t^2$, για κάθε t ∈ $(0,1]$, συνεπώς $\int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, άρα $g(3) > 0$

Όμοια επειδή f είναι γνησίως αύξουσα(αφού f'(x)>0), έχουμε ότι για x>0, f(x)>f(0)=0

Άρα μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο χωρίς να αλλάξει η φορά της ανίσωσης, άρα

$$f^2(t) < t^2, για\ κάθε\ t \in (0,2]$$

Άρα $\int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}$, δηλαδή $g(2) < 0$.

- Η g είναι συνεχής στο [2,3]
- g(2)g(3)<0

Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (2,3)$: $g(x_o) = 0$.

Άρα η αρχική δοσμένη εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3).