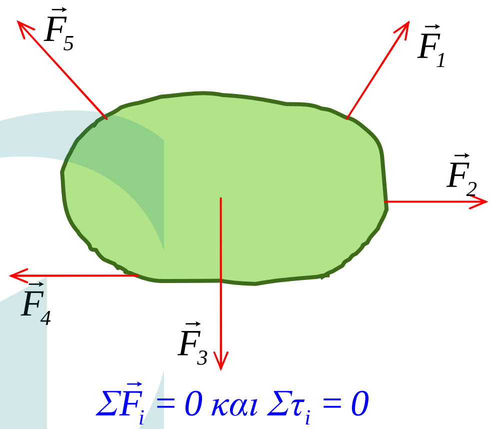
Οι συνθήκες ισορροπίας του στερεού σώματος και η λανθασμένη ερώτηση Α.3 της Φυσικής των Πανελλαδικών εξετάσεων 2014.

Α. Στερεό που ισορροπεί μεταφορικά και στροφικά.

Έστω ένα στερεό που ισορροπεί μεταφορικά και στροφικά ως προς ακίνητο παρατηρητή με την δράση ενός πλήθους ομοεπιπέδων δυνάμεων. Επειδή δεν μεταφέρεται (ή μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα) η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν ... που σημαίνει ότι οι ασκούμενες δυνάμεις ισοδυναμούν με ζεύγος δυνάμεων. Επειδή όμως το στερεό ισορροπεί και στροφικά θα είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, $\Sigma\tau = 0$. Οι ασκούμενες όμως δυνάμεις έχουν ισοδυναμία ζεύγους και αν έχουν $\Sigma\tau = 0$ ως προς κάποιο σημείο θα έχουν συνολική ροπή μηδέν και ως οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου των δυνάμεων.



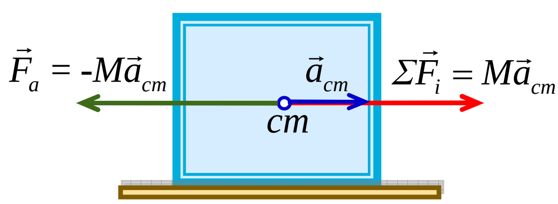
Σχόλιο: Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων με μοχλοβραχίονα d είναι $\tau = Fd \neq 0$ ... εδώ προφανώς πρόκειται για "εκφυλισμένο" ζεύγος δυνάμεων...που οι δυνάμεις του έχουν τον ίδιο φορέα ... $d = 0$.

Συμπέρασμα: Ένα στερεό σώμα ισορροπεί με την δράση ενός πλήθους ομοεπιπέδων δυνάμεων όταν:

1. η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $\left(\Sigma Fx = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \Sigma Fy = 0\right)$ και
2. το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων να είναι μηδέν, $\Sigma\tau = 0$.

Β. Στερεό που επιταχύνεται μεταφορικά και ισορροπεί στροφικά.

Έστω τώρα ένα στερεό σώμα που με την δράση ενός πλήθους n ομοεπιπέδων $\vec{F}_i$ μεταφέρεται με επιτάχυνση a_{cm} (ως προς ακίνητο παρατηρητή), χωρίς να στρέφεται. Στην περίπτωση αυτή η συνισταμένη των δυνάμεων για αδρανειακό παρατηρητή είναι $\Sigma\vec{F}_i = M\vec{a}_{cm}$ και δεν ισοδυναμεί με ζεύγος δυνάμεων. Ένας κινούμενος με το σώμα μη αδρανειακός παρατηρητής προφανώς "βλέπει" ισορροπία και για να την ερμηνεύσει γράφει την εξίσωση $\Sigma\vec{F}_i = M\vec{a}_{cm}$ του αδρανειακού παρατηρητή ως εξής : $\Sigma\vec{F}_i - M\vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow \Sigma\vec{F}_i + \vec{F}_a = 0$. Δηλαδή επί της ουσίας πρόσθεσε στο cm του σώματος μια υποθετική δύναμη $\vec{F}_\alpha = -M\vec{a}_{cm}$ αντίθετη της συνισταμένης δύναμης των n πραγματικών δυνάμεων $\vec{F}_i$. Η υποθετική αυτή δύναμη ονομάζεται αδρανειακή δύναμη D' Alembert και είναι χρηστική στον

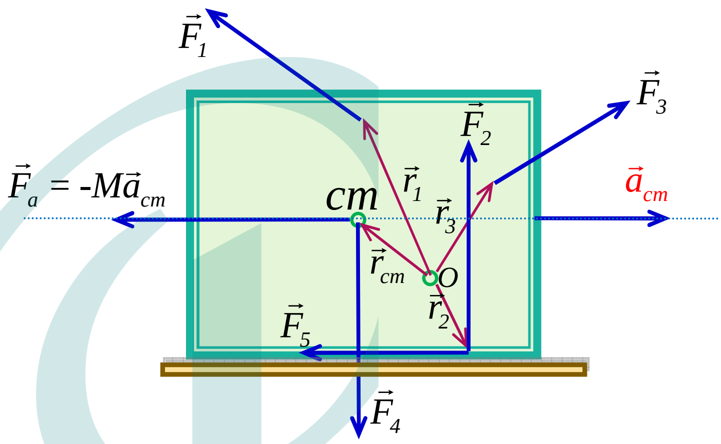


Βασίλης Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr

κινούμενο παρατηρητή για να μελετήσει -ερμηνεύσει την μεταφορική κίνηση ως ισορροπία.

Τώρα το πλήθος των n πραγματικών δυνάμεων $\vec{F}_i$ μαζί με την δύναμη D' Alembert $\vec{F}_\alpha$ έχουν συνισταμένη μηδέν και ισοδυναμούν με ζεύγος δυνάμεων. Αφού δε το στερεό σώμα δεν στρέφεται και υπάρχει για τις δυνάμεις ισοδυναμία ζεύγους (μαζί με την $\vec{F}_\alpha$) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των $\vec{F}_i$ και της $\vec{F}_\alpha$ θα είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων.

Για το στερεό του σχήματος ας πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου των δυνάμεων. Στο σχήμα φαίνονται οι ασκούμενες δυνάμεις $\vec{F}_i$, τα διανύσματα $\vec{r}_i$ που έχουν αρχή το Ο και τέλος τις αρχές των διανυσμάτων $\vec{F}_i$, η δύναμη $\vec{F}_\alpha$ και το διάνυσμα $\vec{r}_{cm}$ που έχει αρχή το Ο και τέλος το cm. Για όλες αυτές τις δυνάμεις η συνολική ροπή ως προς το Ο είναι μηδέν. Αυτή την συνθήκη ας την γράψουμε διανυσματικά με την μορφή εξωτερικών γινομένων.



$$\Sigma\vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \Sigma\vec{\tau}_{(O)} = \Sigma\vec{\tau}_{i(O)} + \Sigma\vec{F}_{a(O)} = \Sigma(\vec{r}_i X\vec{F}_i) + \vec{r}_{cm} X\vec{F}_a = 0 \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι αν $\vec{r}_{cm} = 0$ που ***σημαίνει ότι το τυχαίο σημείο Ο ταυτίζεται με το κέντρο μάζας*** οι ροπές των πραγματικών δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας είναι μηδέν ... $\Sigma\vec{\tau}_{(cm)} = \Sigma\vec{\tau}_{i(cm)} + \underbrace{\tau_{\vec{F}\,a(cm)}}_{=0} = \Sigma(\vec{r}_i X\vec{F}_i) + \underbrace{\vec{r}_{cm} X\vec{F}_a}_{=0} = 0$

$$\Sigma\vec{\tau}_{i(cm)} = \Sigma(\vec{r}_i X\vec{F}_i) = 0$$

Συμπέρασμα: Όταν ένα στερεό σώμα επιταχύνεται μεταφορικά και ισορροπεί στροφικά με την δράση ενός πλήθους ομοεπιπέδων δυνάμεων ,

1. η συνισταμένη δύναμη είναι $\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_{cm}$ και
2. το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό ως προς το κέντρο μάζας του στερεού (και μόνο ως προς αυτό) είναι μηδέν, $\Sigma\tau_{i(cm)} = 0$.

Γ. Το Α.3 των Πανελλαδικών εξετάσεων

Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκούνται ομοεπίπεδες δυνάμεις έτσι ώστε αυτό να εκτελεί μόνο επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. Για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ που του ασκούνται και για το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών Στ ως προς οποιοδήποτε σημείο του, ισχύει:

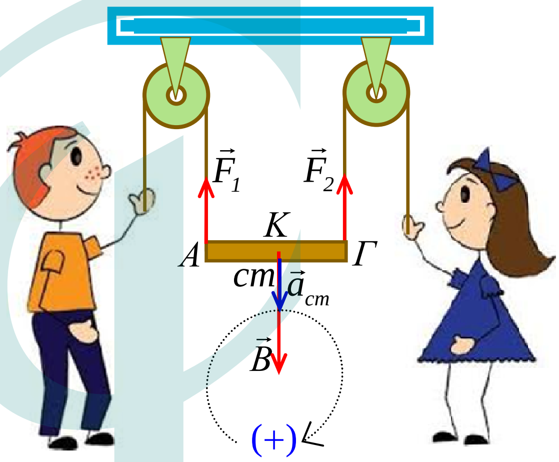
α) $\Sigma\vec{F} = 0, \quad \Sigma\tau = 0$ β) $\Sigma\vec{F} \neq 0, \quad \Sigma\tau \neq 0$

γ) $\Sigma\vec{F} \neq 0, \quad \Sigma\tau = 0$ δ) $\Sigma\vec{F} = 0, \quad \Sigma\tau \neq 0$

Σχόλιο. Αφού το στερεό επιταχύνεται μεταφορικά και ισορροπεί στροφικά σύμφωνα με τα ανωτέρω θα ισχύει $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm} \neq 0$ και $\Sigma\tau_{i(cm)} = 0$ μόνο ως προς το cm και όχι προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων... [*ακόμη και εδώ υπήρχε και άλλο λάθος γιατί ακόμη και αν ίσχυε " ως προς οποιοδήποτε σημείο" αυτό θα ήταν σημείο του επιπέδου των δυνάμεων και όχι τυχαίο σημείο του στερεού!!!*.]

1η Εφαρμογή:

Στο σχήμα τα δύο παιδιά κρατάνε σε κάποιο ύψος σε οριζόντια θέση μια ομογενή σανίδα ΑΓ μάζας $M = 20Kg$ και μήκους $\ell = 2m$ με την βοήθεια δύο τροχαλιών αμελητέας ροπής αδράνειας. Σε κάποια στιγμή τα παιδιά αφήνουν πιο χαλαρά τα νήματα και η σανίδα πέφτει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_{cm} = 4m / s^2$ ευρισκόμενη συνεχώς σε οριζόντια θέση (χωρίς να περιστρέφεται).



Να υπολογισθεί η συνολική ροπή που δέχεται η σανίδα

α) ως προς το κέντρο μάζας της ,

β) ως προς το ένα άκρο της Α. $g = 10ms^{-2}$

Απάντηση

Αφού η ράβδος μεταφέρεται με σταθερή επιτάχυνση γράφουμε $\Sigma F_y = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow$

$$Mg - F_1 - F_2 = Ma_{cm} \text{ (1) και αφού δεν στρέφεται } \Sigma\tau_{K(cm)} = 0 \Rightarrow F_1\frac{\ell}{2} = F_2\frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$F_1 = F_2 \xrightarrow{(1)} Mg - 2F_1 = Ma_{cm} \Rightarrow F_1 = \frac{M\left(g - a_{cm}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{20Kg\left(10 - 4\right)ms^{-2}}{2} \Rightarrow F_1 = F_2 = 60N .$$

α) $\Sigma\tau_{K(cm)} = \tau_B + \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \Rightarrow \Sigma\tau_{K(cm)} = 0 + F_1(AK) - F_2(\Gamma K) \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{K(cm)} = 0 + 60N.1m - 60N.1m \Rightarrow \Sigma\tau_{K(cm)} = 0$ ...αναμενόμενο...

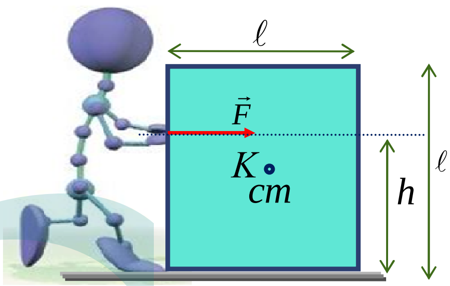
β) $\Sigma\tau_A = \tau_B + \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \Rightarrow \Sigma\tau_A = Mg(KA) + 0 - F_2(\Gamma A) \Rightarrow$

$\Sigma\tau_A = 20Kg.10m.s^{-2}.1m - 60N.2m \Rightarrow \Sigma\tau_A = 80Nm \neq 0!!!$

Δηλαδή εδώ που η ράβδος δεν περιστρέφεται αλλά μεταφέρεται με επιτάχυνση έχουμε $\Sigma\tau_{K(cm)} = 0$ μόνο ως προς το cm!.

2η Εφαρμογή:

Ένα ομογενές κυβικό κιβώτιο μάζας $M = 50Kg$ με τετράγωνη βάση πλευράς $\ell = 2m$ είναι πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,4$. Ένας άνθρωπος ασκεί στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη $F = 250N$ της οποίας ο φορέας είναι σε ύψος $h = 1,8m$ πάνω από το έδαφος και βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του κιβωτίου.



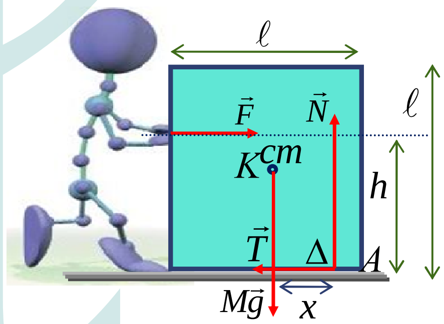
Α) Εξηγείστε ότι το σώμα μεταφέρεται με σταθερή επιτάχυνση χωρίς να ανατρέπεται.

Β) Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή που δέχεται το κιβώτιο ως προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης στήριξης.

Απάντηση

Α) Οι ασκούμενες στο κιβώτιο δυνάμεις είναι:

- το βάρος του κιβωτίου $B = Mg = 500N$
- η δύναμη του ανθρώπου $F = 250N$
- η δύναμη στήριξης N και
- η δύναμη της τριβής T.



Η μέγιστη στατική τριβή είναι

$$T_{\substack{στατ,\\max}} = \mu N = \mu Mg = 0,4.50Kg.10m/s^2 \Rightarrow$$

$$T_{\substack{στατ,\\max}} = 200N$$

Επειδή $F = 250N > T_{\substack{στατ,\\max}} = 200N$ το σώμα επιταχύνεται μεταφορικά ...

$$\Sigma Fx = Ma_{cm} \Rightarrow F - T = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{F - T}{M} \Rightarrow a_{cm} = \frac{250N - 200N}{50Kg} \Rightarrow$$

$a_{cm} = 1m/s^2$.

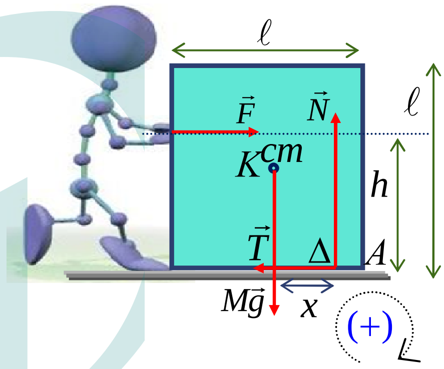
- Στην κατάσταση της ισορροπίας αλλά και της ολίσθησης (χωρίς ανατροπή) η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ δεν μπορεί να διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ γιατί τότε η συνολική ροπή ως προς αυτό θα ήταν διαφορετική από το μηδέν και προφανώς θα υπήρχε ανατροπή $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{Mg} + \tau_F + \tau_T + \tau_N \Rightarrow$

$$\Sigma\tau_{(K)} = F(h - \frac{\ell}{2}) + T\frac{\ell}{2} \neq 0$$

- Ο φορέας της δύναμης στήριξης $\vec{N}$ πρέπει να είναι μετατοπισμένος πιο δεξιά, ώστε να δημιουργείται ροπή από την $\vec{N}$ αντίθετη των ροπών της $\vec{F}$ και $\vec{T}$.

- Η ακραία θέση που μπορεί να έχει ο φορέας της $\vec{F}$ είναι να διέρχεται από το Α και να απέχει από το Κ μέγιστη απόσταση $x_{max} = \frac{\ell}{2}$.

Άρα για να μην υπάρχει ανατροπή πρέπει $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{Mg} + \tau_F + \tau_T + \tau_N = 0 \Rightarrow$ $F(h - \frac{\ell}{2}) + T\frac{\ell}{2} - Nx = 0$ (1). Στον κατακόρυφο άξονα όσο δεν υπάρχει ανατροπή υπάρχει ισορροπία, $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N = Mg = 500N$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε (1) $\Rightarrow 250(1{,}8 - 1) + 200.1 - 500x = 0 \Rightarrow$ $x = 0{,}8m < \frac{\ell}{2}$ ...άρα δεν υπάρχει ανατροπή.



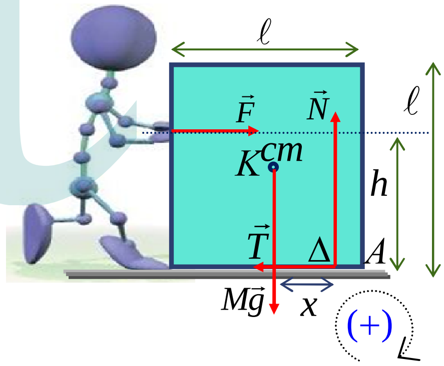
B) $\Sigma\tau_{(\Delta)} = \tau_{Mg} + \tau_F + \underbrace{\tau_T}_{=0} + \underbrace{\tau_N}_{=0} \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = -Mgx + Fh \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = -500.0{,}8 + 250.1{,}8 \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = +50Nm \neq 0$!!! και όμως ισορροπεί μεταφορικά! Στην περίπτωση που το κιβώτιο επιταχύνεται μεταφορικά $\Sigma F_x \neq 0$ αλλά ισορροπεί στροφικά η συνολική ροπή είναι μηδέν ($\Sigma\tau = 0$) μόνο ως προς το κέντρο μάζας του κιβωτίου Κ !

- Αν θέλουμε στην περίπτωση αυτή να μελετήσουμε την στροφική ισορροπία του κιβωτίου θέτοντας $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων πρέπει να θεωρήσουμε "σχετική ισορροπία " για το κιβώτιο προσθέτοντας στο CM του κιβωτίου την "αδρανειακή δύναμη" D'Alembert $\vec{F}_a = -M\vec{a}_{cm}$ που στην περίπτωσή μας έχει μέτρο $F_a = Ma_{cm} = 50.1 = 50N$ και φορά αντίθετη της επιτάχυνσης ...δοκιμάστε...



$\Sigma\tau_{(\Delta)} = \tau_{Mg} + \tau_F + \underbrace{\tau_T}_{=0} + \underbrace{\tau_N}_{=0} + \tau_{Fa} \Rightarrow$

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = Fh - Mgx - F_a\frac{\ell}{2} \Rightarrow \Sigma\tau_{(A)} = 250.1{,}8 - 500.0{,}8 - 50.1 \Rightarrow \Sigma\tau_{(A)} = 0$!