ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 02 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 251

Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 273

Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 150

Α4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z = x + yi$

Είναι $2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2+\left(x-2\right)i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2=0$ και $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Επομένως $x^2+y^2-2=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1$. Επομένως έχουμε τους μιγαδικούς $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. Έχουμε

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\cdot\left(\frac{1+i}{1+i}\right)\right]^{39}=3\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{39}\Leftrightarrow$$

$$w=3i^{39}=3\left(i^4\right)^9\cdot i^3=-3i$$

Β3. Έχουμε,

$|u+w|=|4z_1-z_2-i|\Leftrightarrow|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i|\Leftrightarrow|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow|u-3i|=5$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι κύκλος κέντρου Κ(0,3) και ακτίνας ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$h'(x)=1-\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα. Είναι,

$h''(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$, επομένως η συνάρτηση h στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη).

Γ2. Οι συναρτήσεις $h, \ln x, e^x$ είναι $\nearrow$. Επομένως είναι,

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x))<h(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0.$$

Γ3.

Έχουμε, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$.

Θέτουμε $\dfrac{e^x}{e^x+1}=t$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=1$. Οπότε $t\to1$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln t=0$

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Είναι, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}=1=\lambda$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)=0=\beta$.

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Είναι $\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)=e^x\left(\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)$

Λύνουμε την εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $E=\int_0^1\left|\varphi(x)\right|dx$. Επίσης, λύνουμε την ανίσωση $\varphi(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x}{e^x+1}>0\Leftrightarrow 2e^x>e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$. Επομένως

$$E=\int_0^1\left|\varphi(x)\right|dx=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx.$$

Θέτουμε $e^x=t>0$ άρα $e^x dx=dt$. Για $x=0$ είναι $t=1$ και για $x=1$ είναι $t=e$.
Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$E=\int_1^e\ln\frac{2t}{t+1}dt=\int_1^e t'\ln\frac{2t}{t+1}dt=\left[t\ln\frac{2t}{t+1}\right]_1^e-\int_1^e t\left(\ln\frac{2t}{t+1}\right)'dt=e\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^e t\cdot\frac{\left(\frac{2t}{t+1}\right)'}{\frac{2t}{t+1}}dt\Leftrightarrow$$

$$E=e\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^2 t\cdot\frac{\frac{2(t+1)-2t}{(t+1)^2}}{\frac{2t}{t+1}}dt=e\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^e\frac{\frac{1}{(t+1)^2}}{\frac{2}{t+1}}dt=e\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^e\frac{1}{t+1}dt=e\ln\frac{2e}{e+1}-\left[\ln\left|t+1\right|\right]_1^e\Leftrightarrow$$

$$E=e\ln\frac{2e}{e+1}-\left[\ln(t+1)\right]_1^e\ e\ln\frac{2e}{e+1}-\ln(e+1)+\ln 2=e\ln\frac{2e}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{D.L.H}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}e^x=1=f(0)$. Επομένως η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο μηδέν.

Για $x\neq0$. Η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}>0$ για κάθε $x\neq0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\cdot x-e^x+1$. Είναι $h'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$. Λύνουμε την εξίσωση $h'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$.

Η μονοτονία της g φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘		↗

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $h'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$. Επομένως $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow h(x)\geq 0$.

Για $x=0$ από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Επομένως είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Δ2.

α) Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, επομένως $2f'(x)>0$. Επομένως αφού η f ↗ τότε για κάθε $h>0\Rightarrow f(h)>f(0)\Rightarrow f(h)>1>0$.

Αν $1<2f'(x)$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$. Άτοπο.

Αν $2f'(x)<1$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$. Άτοπο.

Άρα $2f'(x)=1$. Προφανής ρίζα η $x=0$ αφού $f'(0)=\frac{1}{2}$. Η συνάρτηση f είναι κυρτή επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα.

β) Είναι $x'(t)=2y'(t)\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2d\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{dt}\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2d\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{dx}\frac{dx}{dt}\overset{\frac{dx}{dt}>0}{\Leftrightarrow}$

$1=2\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\Leftrightarrow\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{2}$. Επομένως $x=0$ και άρα $A(0,f(0))=(0,1)$.

Δ3.

Είναι $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2,\ \ x>0$.

Επομένως $g(x)=\left(e^x-1+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$

Η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left[\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2\right]'=2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2+2(x-2)\left(e^x-e\right)^2=2(x-2)\left(e^x-e\right)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)=0\Leftrightarrow e^x-e=0 \text{ ή } x-2=0 \text{ ή } xe^x-e^x-e=0\Leftrightarrow$$

$x=1$ ή $x=2$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=xe^x-e^x-e$ στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση φ

- είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi(1)=-e<0$
- $\varphi(2)=e^2-e>0$

Επομένως $\varphi(1)\cdot\varphi(2)<0$ και άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,2]$ ώστε $\varphi(x_0)=0$.

Η συνάρτηση φ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=xe^x>0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Η φ ↗ επομένως για κάθε $x_0<x<2\Rightarrow\varphi(x_0)<\varphi(x)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$.

Ομοίως για κάθε $1<x<x_0\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(x_0)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$.

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας της g είναι,

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
e^x-e		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$\varphi(x)$		-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Επομένως η συνάρτηση g παρουσιάζει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων για x=1 και x=2 και μία θέση τοπικού μεγίστου για $x=x_0$.